证券组合风险最小时证券投资比例及相关系数探讨

王晓秋（副教授）

【摘要】投资者在进行证券投资时，一般不会将所有资金都投资于一种证券，而是投资于两种或两种以上的证券，对于测定两种证券最小方差组合（也就是组合的风险最小）时各证券的投资比例和两种证券投资组合存在最小方差时所要求的相关系数上限，目前的教材一般都是通过作图并测量图上坐标的方法来确定。这种方法既不准确，又费时间，更不能揭示各影响因素及其影响程度。本文通过简单而严密的数学推导，探讨出这两个问题的数学表达式，使得问题“变难为易”，更加直观和容易理解。

【关键词】证券组合风险；证券投资比例；相关系数

【中图分类号】F830　　【文献标识码】A　　【文章编号】1004-0994（2016）08-0126-3

投资者在进行证券投资决策时，为提高收益、分散风险，会将资金投资于多种证券，因此，对证券组合的风险进行客观而科学的衡量非常重要。本文将重点探讨持有两种证券的风险情况。

一、两种证券报酬率的相关系数和证券组合的风险及其衡量

1. 两种证券报酬率相关系数的直观经济含义。投资组合理论认为，若干种证券组成的投资组合，其报酬是这些证券报酬的加权平均值，但其风险不是这些证券风险的加权平均值，证券组合的风险不仅取决于组合内各种证券的风险，还取决于各个证券之间的关系，即不同股票两两之间的相关性。不同股票之间的相关性程度可以用“相关系数”来衡量。若股票构成的证券组合属于完全负相关的证券组合，能够最大限度地降低风险，其相关系数为-1；若股票构成的证券组合属于完全正相关的证券组合，既不会降低也不会增大风险，其相关系数为+1。但在实务中，期望报酬率呈负相关关系的股票组合是比较少见的。因为当经济繁荣时，多数股票都走势良好；当经济低迷时，多数股票都表现不佳。一般而言，多数证券的报酬率趋于同向变动，因此，绝大多数资产（包括股票资产）两两之间均具有不完全的相关关系，即相关系数是小于+1而大于-1的。

本文中引入以下符号：以W_A和W_B分别表示证券A、B在证券组合中的投资比例；R_{Ai}和R_{Bi}分别表示近几年来证券A、B第i年获得的报酬率；$\overline{R}_A$和$\overline{R}_B$分别表示证券A、B各年获得报酬率的平均数；R_{Pi}表示证券A、B构成的投资组合第i年获得的报酬率；σ_A和σ_B分别表示证券A、B的标准差，并假设$\sigma_A<\sigma_{2B}$；以σ_p表示证券A、B构成的投资组合的标准差；以r_{AB}表示证券A、B报酬率之间的预期相关系数。

由于投资组合可以降低风险，但又不能完全消除风险，于是有：

$$(W_A\sigma_A-W_B\sigma_B)^2<\sigma_p^2<(W_A\sigma_A+W_B\sigma_B)^2 \quad (1)$$

令 $$\sigma_p^2=W_A^2\sigma_A^2+W_B^2\sigma_B^2+2W_AW_B\sigma_A\sigma_Br_{AB} \quad (2)$$

由式（1）和式（2）可知，$|r_{AB}|<1$，且如前所述，多数证券的报酬率趋于同向变动，因此，r_{AB}大多为小于1的正值。

$$\because (W_A\sigma_A+W_B\sigma_B)^2=W_A^2\sigma_A^2+W_B^2\sigma_B^2+2W_AW_B\sigma_A\sigma_B \quad (3)$$

$$\therefore \sigma_p^2<W_A^2\sigma_A^2+W_B^2\sigma_B^2+2W_AW_B\sigma_A\sigma_B=(W_A\sigma_p+W_B\sigma_B)^2$$

即：

$$\sigma_p<W_A\sigma_A+W_B\sigma_B$$

由式（2）和式（3）的对比可知，两种证券相关系数r_{AB}的直观经济含义可表述为：在计算两种证券构成的证券组合的方差时，先将各种证券的标准差按其投资比例计算加权平均值，然后进行平方，将由此得到的式（3）右端的$2W_AW_B\sigma_A\sigma_B$乘上一个小于1的系数（折扣率），该系数称为A和B两种证券报酬率之间的预期相关系数r_{AB}，它是反映证券组合降低风险分散化效应的指标。相关系数越小，投资组合的风险分散化效应越强（投资组合的风险越小）；相关系数越大，投资组合的风险分散化效应越弱（投资组合的风险越大）。$2W_AW_B\sigma_A\sigma_B(1-r_{AB})$则表示证券A、B构成的投资组合被分散掉的以方差表示的风险的大小。

2. 相关系数r_{AB}的计算公式。利用历史数据度量资产风险的计算公式为：

$$\sigma_A^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai}-\overline{R}_A)^2$$

$$\sigma_B^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_{Bi}-\overline{R}_B)^2$$

$$\sigma_p^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_{pi}-\overline{R}_p)^2$$

考虑以下两个等式：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_{pi}=\overline{R}_p$$

$R_{pi}=W_AR_{Ai}+W_BR_{Bi}$（证券投资组合的报酬是这些证券报酬的加权平均值）

于是有：

$$\sigma_p^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_{pi}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_{pi})^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(W_AR_{Ai}+W_BR_{Bi})-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(W_AR_{Ai}+W_BR_{Bi})]^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(W_AR_{Ai}+W_BR_{Bi})-(W_A\overline{R}_A+W_B\overline{R}_B)]^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[W_A(R_{Ai}-\overline{R}_A)+W_B(R_{Bi}-\overline{R}_B)]^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[W_A^2(R_{Ai}-\overline{R}_A)^2+W_B^2(R_{Bi}-\overline{R}_B)^2+2W_AW_B(R_{Ai}-\overline{R}_A)(R_{Bi}-\overline{R}_B)]$$

$$=W_A^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai}-\overline{R}_A)^2}{n-1}+W_B^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{Bi}-\overline{R}_B)^2}{n-1}+\frac{2W_AW_B\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai}-\overline{R}_A)(R_{Bi}-\overline{R}_B)}{n-1}$$

$$=W_A^2\sigma_A^2+W_B^2\sigma_B^2+2W_AW_B\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai}-\overline{R}_A)(R_{Bi}-\overline{R}_B)}{n-1}$$

对照式(2)，则：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai}-\overline{R}_A)(R_{Bi}-\overline{R}_B)}{n-1}=\sigma_A\sigma_Br_{AB} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{(R_{Ai}-\overline{R}_A)^2}}{\sqrt{n-1}}\times\frac{\sqrt{(R_{Bi}-\overline{R}_B)^2}}{\sqrt{n-1}}=\sigma_A\sigma_B \quad (5)$$

由$\frac{(4)}{(5)}$得出相关系数r_{AB}的计算公式为：

$$r_{AB}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai}-\overline{R}_A)(R_{Bi}-\overline{R}_B)}{\sqrt{(R_{Ai}-\overline{R}_A)^2}\times\sqrt{(R_{Bi}-\overline{R}_B)^2}}$$

3. *两种证券投资组合的标准差*。计算出相关系数r_{AB}以后，根据式(2)可计算出两种证券投资组合的标准差：

$$\sigma_p=\sqrt{W_A^2\sigma_A^2+W_B^2\sigma_B^2+2W_AW_B\sigma_A\sigma_Br_{AB}}$$

二、两种证券投资组合风险衡量方法的应用

例1：假设A证券的预期报酬率为10%、标准差为12%，B证券的预期报酬率为18%、标准差为20%，两种证券之间的预期相关系数是0.2。在两种证券投资比例如表1所示的六种情况下，计算各个组合的期望报酬率和组合的标准差。

表1　　两种证券的投资比例

组合	对A的投资比例	对B的投资比例
1	1	0
2	0.8	0.2
3	0.6	0.4
4	0.4	0.6
5	0.2	0.8
6	0	1

以组合2为例，其预期报酬率和标准差计算如下：

组合的期望报酬率=0.8×10%+0.2×18%=11.60%

组合的方差=$0.8^2\times12\%^2+0.2^2\times20\%^2+2\times0.8\times0.2\times12\%\times20\%\times0.2=0.012352$

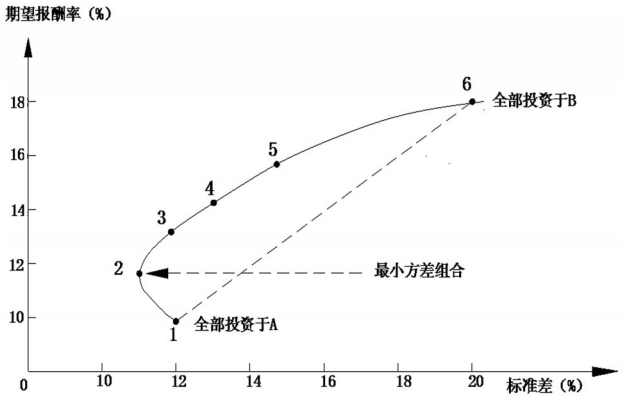
组合的标准差=$\sqrt{0.012352}\times100\%=11.11\%$

其他各组合的期望报酬率和标准差也可用同样的方法计算出来，具体如表2所示。

表2　　不同比例投资组合的预期报酬率和标准差

组合	对A的投资比例	对B的投资比例	组合的期望报酬率	组合的标准差
1	1	0	10.00%	12.00%
2	0.8	0.2	11.60 %	11.11%
3	0.6	0.4	13.20 %	11.78%
4	0.4	0.6	14.80 %	13.79%
5	0.2	0.8	16.40 %	16.65%
6	0	1	18.00 %	20.00%

结合表1和表2的有关资料，可以绘制出两种证券不同比例投资组合的预期报酬率和标准差示意图，如下图所示。



两种证券不同比例投资组合的预期报酬率和标准差示意图

示意图中的虚线1～6反映了证券A和证券B完全正相关($r_{AB}=1$)时不同比例投资组合的机会集曲线(实际上它是一条笔直的线段),说明当$r_{AB}=1$时,两种证券不同比例投资组合的标准差是组合内部单项资产的标准差与投资比重的加权平均数,该组合风险分散化效应点1、2、3、4、5、6分别与表2中不同比例投资组合的预期报酬率和标准差一一对应,将其连成一条曲线,这条曲线称之为相关系数$r_{AB}=0.2$时的证券A、B不同比例投资组合的机会集曲线,它也是投资于证券B的比重由0逐步增加到100%时,反映对应标准差(横坐标)和期望报酬率(纵坐标)的点构成的曲线。比如点2,反映投资于证券A的比重为80%、投资于证券B的比重为20%时,其横坐标(标准差)为11.11%、纵坐标(期望报酬率)为11.60%的点,其他以此类推。

仔细观察该图可以看到:①当投资于风险(标准差)较高的证券B的资金比重由零逐步增加到一定程度时,图中对应的点沿着点1在曲线上逐步移动到点2,证券投资组合的风险(标准差)反而逐步减小。这一结果有悖于人们的直觉,但这恰恰揭示了风险分散化效应的内在特征。②当投资于风险(标准差)较高的证券B的资金比重在点2的基础上继续上升时,机会集曲线上的点则从点2沿着机会集曲线逐步上升,直到点6为止。对比点1到点2的曲线和点2到点3的曲线,以点1和点3为例,点3的证券B投资比重比点1大,然而风险(标准差)却与点1相同,但是点3反映的期望报酬率比点1要高(点1～2中各点都有点2～3中的一个点与之有相同的情况)。这就很直观地说明了沿着曲线1到2相应增加证券B的比重是没有意义的,即机会集曲线1～2是无效的,应该继续增大证券B(减少证券A)的投资比重。机会集曲线2～6之间的曲线才是有效集。投资组合理论将图中的点2称为最小方差组合,它在持有的证券A和证券B的各种组合中标准差最小(也就是风险最小)。点2在机会集曲线上有一个明显的特点:通过点2所作的曲线的切线垂直于坐标轴的横轴。

讨论到这里,投资者一般会对以下两个问题产生比较大的兴趣:

问题一:如何测定两种证券最小方差组合(也就是组合的风险最小时)各证券的投资比例?

对前述公式(2)的W_A求一阶导数,并考虑到$W_B=1-W_A$,则:

$$(\sigma_p^2)'=(W_A^2\sigma_A^2+W_B^2\sigma_B^2+2W_A\sigma_A\sigma_Br_{AB})'$$
$$=2W_A\sigma_A^2-2(1-W_A)\sigma_B^2+2(1-W_A)\sigma_A\sigma_Br_{AB}-2W_A\sigma_A\sigma_Br_{AB}$$

令$(\sigma_p^2)'=0$,得到使σ_p^2取最小值时的W_A:

$$W_A=\frac{\sigma_B^2-\sigma_A\sigma_Br_{AB}}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\sigma_A\sigma_Br_{AB}} \quad (6)$$

由于使$(\sigma_p^2)'=0$的W_A值只有一个,所以据公式(6)计算出的W_A使σ_p^2(将其开平方后即σ_p)为最小值。

例2:沿用例1的资料,测算使两种证券组合风险最小时各证券的投资比例。

$$W_A=\frac{\sigma_B^2-\sigma_A\sigma_Br_{AB}}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\sigma_A\sigma_Br_{AB}}$$
$$=\frac{20\%^2-12\%\times20\%\times0.2}{12\%^2+20\%^2-2\times12\%\times20\%\times0.2}$$
$$\approx80\%$$
$$W_B=1-W_A=1-80\%=20\%$$

问题二:是不是两种证券投资组合的机会集曲线都有上述这样一个点,并且通过这个点所作的曲线的切线垂直于坐标轴的横轴?

答案是否定的。前文图中机会集曲线向点A左侧凸出的现象并非是必然伴随着分散化投资而发生的,它取决于投资组合中证券的相关系数的大小,当相关系数大到一定程度时,就不再存在上述现象。

下面测定存在最小方差组合所要求的相关系数上限。

显然$W_A<1$,则有:

$$\frac{\sigma_B^2-\sigma_A\sigma_Br_{AB}}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\sigma_A\sigma_Br_{AB}}<1$$

解得:

$$r_{AB}<\frac{\sigma_A}{\sigma_B}$$

例1中,$\sigma_A=12\%$,$\sigma_B=20\%$。

所以,例1中的$r_{AB}<\frac{0.12\%}{0.20\%}=0.6$。

由上述分析可知,通过两个简单的数学表达式能够比较容易地测算出两种证券组合风险最小时各证券投资比例及相关系数的上限。通常随着证券资产组合中资产个数的增加,证券资产组合的风险会逐渐降低,但是当资产的个数增加到一定程度时,证券资产组合的风险程度将趋于平稳,组合风险的降低将很缓慢,在达到某个临界值时就不再降低。这是因为资产的风险包括非系统风险和系统风险两类,证券组合能够分散的风险只有非系统风险,系统风险是不能通过证券组合来分散的。

主要参考文献:

中国注册会计师协会.2015年度注册会计师全国统一考试辅导教材:财务成本管理[M].北京:中国财政经济出版社,2015.

荆新,王化成,刘俊彦.财务管理学[M].北京:中国人民大学出版社,2012.

黄亮亮,王勇.投资组合风险的均值方差分析[J].上海电力学院学报,2012(6).

胡经生等.VaR方法及其拓展模型在投资组合风险管理中的应用研究[J].数量经济技术经济研究,2005(5).

作者单位:成都文理学院会计学院,成都610101