

基于累积展望理论的 期望效用非线性投资组合分析

于磊¹, 周海林²(教授), 乔龙威²

(1.山东经贸职业学院财经金融系, 山东潍坊 261011; 2.安徽财经大学金融学院, 安徽蚌埠 233000)

【摘要】 本文将投资者S型效用函数和基于等级依赖的决策权重函数引入投资者效用函数中,以最大化投资者的累积展望价值为出发点,建立基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型,并利用我国上海证券市场的实际数据对模型的合理性和有效性进行验证,比较分析与传统投资组合模型的差异,证明基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型更贴近资本市场和投资者的行为特征,从而为投资者和风险管理提供决策参考。

【关键词】 累积展望理论; 非线性; 期望效用; 投资组合

一、引言

投资组合选择问题是现代金融研究的核心问题之一。对于投资组合选择问题的研究,通常以两条路径展开:一条路径是以Markowitz均值一方差(MV)模型为代表的“风险—收益”研究,即投资者追求既定风险水平下最大化期望收益率,或既定期望收益率下最小化风险;另一条路径是在Von Neumann—Morgenstern期望效用理论框架下,即假设追求最大化期望效用。

1979年,Kahneman和Tversky对长期以来经济学沿用的理性经济人假设提出了质疑,认为人的心理特质、行为特征揭示影响选择行为的非理性心理因素,个人基于参考点位置的不同,会有不同的风险态度,提出了展望理论(PT)。Tversky和Kahneman(1992)进一步考虑到累积概率分布的权重将展望理论发展为累积展望理论(CPT)。PT、CPT作为行为金融学的基础,说明投资者在不确定条件下做出决策的过程和决策偏好。关于PT、CPT正确与否,学术界的争论基本上分为两种观点:一种证实(累积)展望理论(Chang, Nichols和Schultz, 1987; Brown等, 2002);另一种反对(累积)展望理论(Birnbaum, Patton和Lott, 1999; Slattery, Jeffrey和Ganster, 2002)。

PT、CPT从投资者行为出发研究期望效用,为投资组合选择开辟了新的视角。Benartzi和Thaler(1995)率先将损失厌恶引入投资组合问题,说明在二期情况下的最优投资组合选择。徐绪松、马莉莉和陈彦斌(2007)建立了基于损失规避的最优投资组合模型,并利用上证30指数进行了实证检验。Jin和Zhou(2008)构造了引入累积展望理论的连续行为投资组合选择模型。胡支军、叶丹(2010)利用展望理论的价值函数建立了基于损失厌恶的最优投资组合模型,同时设计了一个三次样条函数解决了参考点

处的非光滑问题,最后利用我国证券市场的实际数据对模型进行了验证。米辉(2012)利用鞍方法研究了一般价值函数下损失厌恶投资者的最优投资组合问题。Traian和Klaas(2012)研究了CPT投资者如何分配投资组合,并通过控制风险,解决模型的非光滑优化问题。

将PT或CPT应用于投资组合选择问题不能只考虑损失厌恶的效用函数,投资者的期望价值由价值函数和决策权重共同决定(Ulrich Schmit和Horst Zank, 2007; Maitina Nardon和Paolo Pianca, 2012)。本文从资本市场和投资者的行为特征出发,综合考虑S型价值函数和决策权重函数,构造基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型。并利用我国证券市场的实际数据进行实证检验,比较分析与传统投资组合模型实证分析的差异。

二、CPT的价值函数和决策权重

CPT将投资者的风险态度划分为四类:高概率收益下的风险厌恶,高概率损失下的风险偏好,小概率收益下的风险偏好,小概率损失下的风险厌恶。CPT的两个重要组成部分为S型价值函数和决策权重函数,因此,CPT的核心可以描述为:期望价值由S型价值函数和决策权重共同决定。其具有以下三个特点:①以投资者主观设定的参考点为界定收益或损失;②收益区间价值函数下凹,投资者为风险厌恶型,损失区间价值函数下凸,投资者为风险偏好型;③价值函数左侧的斜率大于右侧的斜率,即损失给投资带来的痛苦远大于等数值收益带来的幸福。具体来说,兼有风险厌恶和风险偏好的损失厌恶投资者的价值函数 $V(X)$ 一般形式为:

$$V(X) = \begin{cases} X^\alpha & X \geq 0 \\ -\lambda(-X)^\beta & X < 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: α 和 β 分别代表收益、损失区间价值函数的凹凸

程度,即投资者面对收益、损失时的敏感度;系数λ控制投资者的损失厌恶程度,表示价值函数左侧的斜率大于右侧的斜率;X代表最终财富相对于参考点的变化。

CPT的另一个决策权重函数π(p)是对客观概率P的非线性转换,当决策权重接近0和1时,投资者会过度重视概率变化。假定存在风险条件下的选择(p₁, R₁; p₂, R₂; …; p_n, R_n),其中p_i代表R_i出现的概率。由累积展望理论等级依赖原则,将各选择依R_R排序:R₁≤R₂≤…≤R_k≤R_R≤R_{k+1}≤…≤R_n。设在区间(2, w)中,概率转换函数为w⁻(p);在区间(k+1, n-1)中,概率转换函数为w⁺(p)。则累积概率分布的决策权重函数可以表示如下:

$$\pi_i^- = w^-(p_1 + \dots + p_i) - w^-(p_2 + \dots + p_{i-1}) \quad 2 \leq i \leq k \quad (2)$$

$$\pi_i^+ = w^+(p_i + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n) \quad k+1 \leq i \leq n-1 \quad (3)$$

$$\text{其中, } w^-(p) = \frac{p^{\delta_1}}{[p^{\delta_1} + (1-p)^{\delta_1}]^{\delta_1}} \quad (4)$$

$$w^+(p) = \frac{p^{\delta_2}}{[p^{\delta_2} + (1-p)^{\delta_2}]^{\delta_2}} \quad (5)$$

三、基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型

假设在期初有n种风险资产,r_i(i=1,2,⋯,n)表示第i种风险资产的收益率,θ_i(i=1,2,⋯,n)为投资于第i种风险资产的投资比例,满足∑_{i=1}ⁿθ_i=1。首先,考虑仅有一期的

投资组合选择情况,则该期投资组合的收益率W=∑_{i=1}ⁿθ_ir_i。

选定无风险收益率r_f为主观财富参考点,可得最终财富相对于参考点的变化X=W-r_f,则调整后,兼有风险厌恶和风险偏好的损失厌恶投资者的效用函数V(X)为:

$$V(X) = \begin{cases} (W-r_f)^\alpha & W \geq r_f \\ -\lambda(r_f-W)^\beta & W < r_f \end{cases} \quad (6)$$

考虑T期投资组合选择问题,r_i^t(t=1,2,⋯,T)表示第i个风险资产在第t期的收益率,θ_i(i=1,2,⋯,n)仍表示投资于第i种风险资产的投资比例,满足∑_{i=1}ⁿθ_i=1。因此,第t

期该投资组合的收益率为W^t=∑_{i=1}ⁿθ_ir_i^t,若该投资组合获得收益W^t对应的概率为p^t,则该投资组合T期离散的收益率概率分布为(p₁, W₁; p₂, W₂; …; p_T, W_T)。根据CPT,该资产的累积展望价值由两部分构成——价值函数和决策权重函数。选定无风险收益率r_f为主观财富参考点,即X^t=W^t-r_f(t=1,2,⋯,T)。在卖空约束下,基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型可表述为:

$$\max E[V(W^1, W^2, \dots, W^T)] = \sum_{t=1}^T \pi_t V(W^t - r_f) \quad (7)$$

$$V(X) = \begin{cases} (W^t - r_f)^\alpha & W^t \geq r_f \\ -\lambda(r_f - W^t)^\beta & W^t < r_f \end{cases} \quad (8)$$

$$\pi_i^- = w^-(p_1 + \dots + p_i) - w^-(p_2 + \dots + p_{i-1}) \quad 2 \leq i \leq k \quad (9)$$

$$\pi_i^+ = w^+(p_i + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n) \quad k+1 \leq i \leq n-1 \quad (10)$$

$$\text{其中, } w^-(p) = \frac{p^{\delta_1}}{[p^{\delta_1} + (1-p)^{\delta_1}]^{\delta_1}} \quad (11)$$

$$w^+(p) = \frac{p^{\delta_2}}{[p^{\delta_2} + (1-p)^{\delta_2}]^{\delta_2}} \quad (12)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} W^t = \sum_{i=1}^n \theta_i r_i^t & t=1, 2, \dots, T \\ \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 & \theta_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (13)$$

根据T期各风险资产收益率的历史数据,研究基于累积展望理论的最优投资组合问题,可以求解得出该条件下最大的累积展望价值,以及对应的最优投资组合中各风险资产的投资比例θ。

四、实证分析

1. 数据和参数选择。本文以上证50指数的49只股票(由于中国交通建设上市时间较晚,数据较少,故舍弃)作为投资者选择的资产,以2012年1月1日到2013年6月30日股票交易日数据作为数据选取区间,为排除49只股票在数据区间交易日的差别,仅选取其中243个股票交易日数据作为样本数据。采取对数收益率即第i个交易日的收益率r_i=lnP_{i+1}-lnP_i(1≤i≤243),其中P_i和P_{i+1}分别代表第i个交易日和第i+1个交易日的收盘价。

本文为更接近CPT原型,选择Tversky和Kahneman(1992)的做法,采用非线性回归分析得出的最符合投资者决策心理的参数值,即α=β=0.88,λ=2.25,δ₁=0.69,δ₂=0.61。如表1所示:

表1 CPT参数选择

参数	Tversky和Kahneman(1992)	徐绪松等(2007)	胡支军、叶丹(2010)	Traian和Klaas(2012)	Maitina和Paolo(2012)
α	0.88	0.88	0.88	0.63	1
β	0.88	0.88	0.88	0.63	1
λ	2.25	2.25	2.25	2.25	1
δ ₁	0.69			2	1
δ ₂	0.61			1.5	1

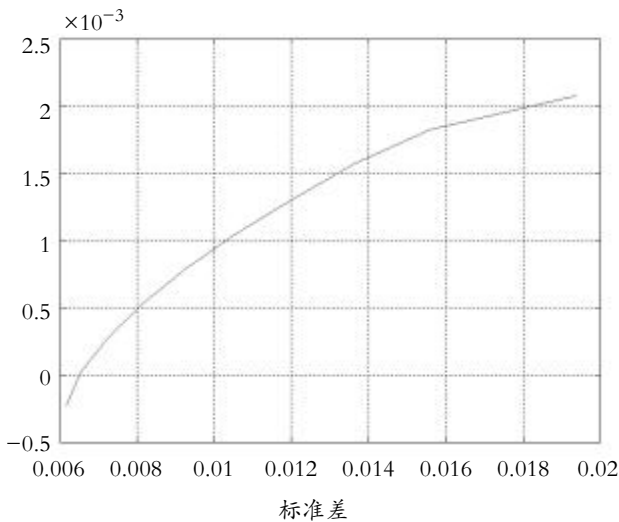
本文选取调整后一年期银行定期存款利率3.25%作为无风险收益率,即主观收益参考点。由于选择的交易日为243个,则该投资组合离散的收益率概率分布可以表示为(1/243, W₁; 1/243, W₂; 1/243, W_T),即每获得收益W^t对

应的初始概率均为 $\frac{1}{243}$ 。本文采用 MATLAB 的遗传算法求解基于 CPT 的期望效用非线性投资组合问题。

2. 模型计算结果及分析。本文利用 MATLAB 遗传算法求解得出的最大累积展望价值为 5.971 9%，与之相对应的各风险资产的投资比例如表 2 所示。

从表 2 可以看出，各风险资产除浦发银行投资比例为零以外，其余风险资产投资比例均保持在 0.015 左右。在卖空限制条件下，投资者的投资策略为分散化投资，合理分配各种风险资产的投资比例，贴近于资本市场和投资者行为特征，符合实际。

3. 存在卖空限制的投资组合优化模型。为比较分析基于累积展望理论的非线性投资组合模型与传统卖空限制下投资组合优化模型的差异，将该 49 只风险资产作为研究对象，采用相同的样本区间（243 个交易日的历史数据），得出基于 MV 投资组合的有效前沿，如下图所示：



49 种风险证券组合的均值-方差有效前沿

从上图可以看出，基于累积展望理论的最优投资组合不同，在 MV 模型中，随着理性投资者期望收益增加，标准差也随着增加，也就是说，理性投资者要获得较高的期望收益，必须承担与之对应的高风险。

当不存在无风险资产且存在卖空限制时，同样采取一年期定期存款利率 3.25% 作为目标收益率，有效前沿上投资者获得收益 0.002 1 时，需承担的最小风险为 0.019 4，与之相对应的各风险资产投资比例如表 3 所示。

从表 3 可以看出，在不存在无风险资产和卖空限制条件下，基于 MV 模型的最优投资组合，民生银行投资比例接近 1，各风险资产投资比例都几乎为零。这与均值方差模型中分散化投资降低风险的原理不一致，其原因是：
① 民生银行在数据选取区间的表现优异，其期望收益率为 0.002 075 8，在所选 49 只股票中位列榜首，并且其标准差为 0.019 336，较其余 48 只股票也很小；
② 在剔除民生银行这一风险资产后，基于 MV 模型再次分析最优组合，发现最优投资组合变得比较分散。可见，民生银行在数据选取区间表现优异是造成该现象的主要原因。

表 3 中，将基于累积展望理论的最优投资组合的分析结果代入基于 MV 模型的最优投资组合中，得出相应的最优投资组合的收益率为 -0.000 59，对应的标准差为 0.017 96，明显位于有效前沿下方，即风险资产投资组合可行范围的无效区域。也就是说，基于 MV 下的累积展望最优投资组合模型得出的结论是无效的，究其成因，传统投资组合模型和基于累积展望理论的最优投资组合模型在分析投资组合问题的思路存在显著差异：基于 MV 有效前沿分析最优投资组合问题，假定投资者只关注期望收益率和方差，完全忽略了金融市场中的摩擦和投资者的心理特征；而基于累积展望理论分析最优投资组合问题，从投资者的行为特征出发，实证分析得出分散化的投资策略，更贴近资本市场和投资者特征。

表 2 最优投资组合对应的各风险资产投资比例

股票代码	浦发银行	包钢股份	华夏银行	民生银行	宝钢股份	中国石化	中信证券	三一重工	
0.015509	0	0.015953	0.015608	0.015507	0.015365	0.015479	0.015531	0.015436	
0.015509	招商银行	保利地产	中国联通	五矿发展	上汽集团	包钢稀土	兰花科创	兖州煤业	广汇能源
0.015509	0.016682	0.015663	0.015535	0.015404	0.27128	0.015182	0.01502	0.014377	
0.015501	国阳新能	江西铜业	中金黄金	贵州茅台	山东黄金	厦门钨业	海螺水泥	海通证券	伊利股份
0.015501	0.015132	0.016224	0.015812	0.014616	0.017256	0.014183	0.014926	0.015631	
0.017081	大秦铁路	中国神华	兴业银行	北京银行	农业银行	中国北车	中国平安	交通银行	新华保险
0.017081	0.014787	0.017118	0.014628	0.015331	0.015736	0.015928	0.014969	0.015512	
0.015161	工商银行	中国太保	中国人寿	中国建筑	中国水电	华泰证券	潞安环能	中国南车	光大银行
0.015161	0.015808	0.015984	0.015226	0.015208	0.014872	0.016189	0.015941	0.015169	
0.015259	中国石油	中煤能源	紫金矿业	方正证券	中国重工				
0.015259	0.015512	0.015558	0.015931	0.015279					

表 3 MV 模型下各风险资产投资比例

股票名称	浦发银行	包钢股份	华夏银行	民生银行	宝钢股份	中国石化	中信证券	三一重工
投资比例	2.35E-129	1.48E-19	3.15E-115	1	-9.66E-19	-8.23E-18	-1.81E-17	1.02E-17
招商银行	保利地产	中国联通	五矿发展	上汽集团	包钢稀土	兰花科创	兖州煤业	广汇能源
-7.67E-18	1.66E-17	-1.82E-17	2.76E-18	-1.17E-17	7.35E-18	2.15E-17	1.04E-17	1.63E-17
国阳新能	江西铜业	中金黄金	贵州茅台	山东黄金	厦门钨业	海螺水泥	海通证券	伊利股份
-6.65E-18	-2.54E-18	3.41E-18	9.95E-18	7.70E-18	-4.55E-18	1.72E-17	0	2.46E-17
大秦铁路	中国神华	兴业银行	北京银行	农业银行	中国北车	中国平安	交通银行	新华保险
4.51E-17	-2.32E-17	0	8.35E-18	1.63E-17	-1.34E-17	-3.82E-17	2.96E-17	1.41E-17
工商银行	中国太保	中国人寿	中国建筑	中国水电	华泰证券	潞安环能	中国南车	光大银行
1.63E-17	2.51E-17	2.38E-17	-3.80E-18	7.18E-18	-1.85E-17	2.62E-17	4.26E-17	-5.03E-17
中国石油	中煤能源	紫金矿业	方正证券	中国重工				
2.54E-17	2.09E-17	-1.25E-17	-2.69E-17	-3.16E-17				

五、结论

传统投资组合模型假定投资者理性和风险规避,忽略了资本市场和投资者行为的本质属性。累积展望理论在展望理论的基础上,综合考虑S型价值函数和决策权重函数,全面反应投资者损失厌恶、重视小概率事件等心理特征。本文借鉴累积展望理论的研究成果,建立了基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型,以最大化投资者的累积展望价值求解投资者最优投资组合。

本文论述思路和得出的结论是:①将投资者S型效用函数和基于等级依赖的决策权重函数引入投资者效用函数中,总结为投资者的累积展望价值。②以最大化投资者的累积展望价值为出发点,建立基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型。③利用我国上海证券市场的实际数据对模型的合理性和有效性进行了验证,并比较分析了与传统投资组合模型的差异,得出基于累积展望理论的期望效用非线性投资组合模型更贴近资本市场和投资者的行为特征,具有更好的业绩表现。

需要指出的是,本文所建立的基于累积展望理论的投资组合模型仅从投资者行为特征出发,没有考虑实际资本市场中手续费、最小买卖单位等摩擦因素,如何将这此摩擦因素引入模型以全面真实反映投资组合选择是值得研究的问题。此外,本文选取的财富参考点是一年期存款利率,并且参数选择较为笼统,以后的研究可以利用模拟仿真技术和标的资产的真实交易数据,设计随机搜索算法和贝叶斯参数估计法,对构建的基于累积展望理论的非线性投资组合模型进行参数估计研究。

主要参考文献

Markowitz H.. Portfolio selection [J]. Journal of Finance, 1952(1).
 Tversky A., Kahneman D.. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty [J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992(4).

Chang O. H., D. R. Niehols, J. J. Schulzt. Taxper attiutdes toward tax audit risk [J]. Journal of Economic Psychology, 1987(9).

Brown P., N. Chappel Rosa, T. Walter. The research of the disposition effect: large sample evidence across investor classes[D/OL]. www.af.ecel.uwa.edu.au/data/page/9373/02-145.pdf. 2002.

Bimbaum M. H., J. N. Patton, M. K. Lott. Evidence against rank- dependent utility theories: tests of cumulative independence, interval independence, stochastic dominance, and transitivity [J]. Organizational Behaviour and Human Decision Processes, 1999(1).

Slattery Jeffrey, D. Ganster. Determinants of risk taking in a dynamic uncertain context[J]. Journal of Management, 2002(1).

Benartzi S., R.H.Thaler. Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle[J]. Quarterly Journal of Economics, 1995(1).

Barbersis, N., M. Huang, T. Santos. Prospect Theory and Asset Prices [J]. Quarterly Journal of Economics, 2001(1).

杨春鹏,姜伟,解强,吕世瑜.过度自信 展望理论与处置效应[J].青岛大学学报, 2007(1).

徐绪松,马莉莉,陈彦斌.考虑损失规避的期望效用投资组合模型[J].中国管理科学, 2007(10).

胡支军,叶丹.基于损失厌恶的非线性投资组合问题[J].中国管理科学, 2010(4).

米辉.鞍方法和随机控制理论在投资组合和期权定价中的应用[D].北京:中国科技大学, 2012.

Traian A. Pirvu, Klaas Schulze. Multi-Stock Portfolio Optimization under Prospect Theory[J]. Financial Valuation and Risk Management, 2012(6).