

投资组合最优化有效边界绘制的实证分析

尹楠(博士)

(南京晓庄学院商学院, 南京 211171)

【摘要】 本文探讨投资组合优化问题中有效边界的绘制, 基于实证分析利用均值方差模型方法和模拟退火算法分别绘制出投资组合的有效边界。结论表明, 基于模拟退火算法绘制出的有效边界相对精确。

【关键词】 均值方差模型; 模拟退火算法; 有效边界

一、引言

投资组合最优化问题是指投资者对各种证券商品, 例如股票、债券等进行投资选择而形成的多个投资品种组合, 在一定的约束条件下, 使投资者的投资收益达到最大化。投资的目的就是要获得最大的收益, 同时承担最小的风险。为了找到期望收益和投资风险之间的平衡, Markowitz首先提出了证券投资组合理论, 国内不少学者也基于该理论研究了投资组合的最优化问题, 如荣喜民等(2005)研究了基于均值—VAR的投资组合最优化问题, 利用均值—VAR方法, 提出了有交易费用存在时的最优投资组合模型。张立新等(2005)提出了风险资本的组合适投资最优化模型, 利用委托代理理论建立了风险资本的组合适投资最优化模型, 通过模型给出了项目数和收益分配比例的最优解。

但如何寻找到投资组合中的有效边界, 并没有专门的文献研究此问题, 除了可以利用传统的均值方差模型寻找有效边界之外, 还可以利用随机控制理论中的模拟退火算法绘制出投资组合的有效边界。本文正是基于这两种方法绘制出投资组合中的有效边界。

二、基于均值方差模型有效边界

1. 均值方差模型的思想。Markowitz(1952)提出了一个在不确定条件下可实现的资产组合选择理论: 均值-方差模型方法。该方法的基本思想如下: 资产组合的期望收益是构成组合的每一资产收益率的加权平均, 以构成比例为权重。每一资产对组合的预期收益率的贡献依赖于它的预期收益率, 假定市场上有资产 $1, 2, \dots, N$ 。资产 i 的期望收益率为 $E(r_i)$, 方差为 σ_i^2 , 资产 i 与资产 j 的协方差为 σ_{ij} (或相关系数为 ρ_{ij}) ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$) 投资者的投资组合为: 投资于资产 i 的比例为 $W_i, i=1, 2, \dots, N$ 。

则资产组合的期望收益为:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i)$$

多资产组合的方差:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad \text{其中 } \sigma_{ii} = \sigma_i^2$$

协方差是两个随机变量相互关系的一种统计测度, 即它测度两个随机变量, 资产的协方差可以表述如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \text{cov}(r_A, r_B) \\ &= E(r_A - E(r_A))(r_B - E(r_B)) \end{aligned}$$

多个资产的方差—协方差矩阵:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = w^T Q w$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N-1} & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & & \sigma_{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N-12} & \cdots & \sigma_{NN-1} & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$$

2. 实证分析。基于某证券交易所 20 只股票 6 个月以上的大量交易数据记录, 在统计分析软件 R 语言中计算出 20 只股票的协方差阵和平均收益, 并将平均收益率绘制成散点图的形式, 如图 1 所示。20 只股票的平均期望收益率在图中显示比较分散。

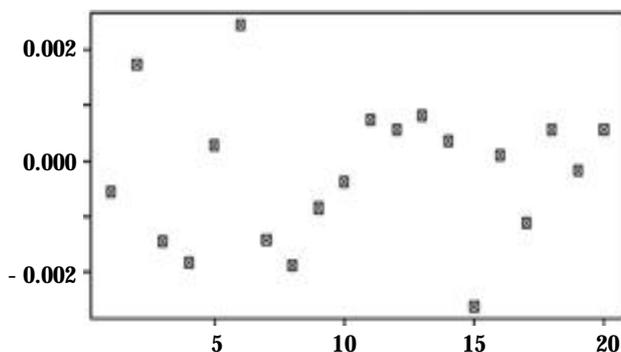


图 1 20 只股票的期望收益率

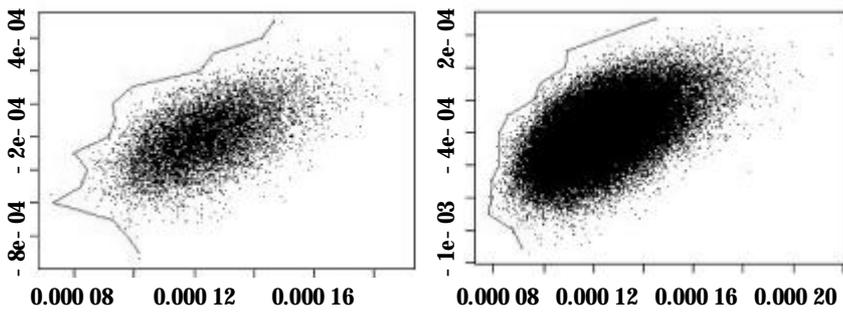


图2 模拟1万次和10万次投资组合的有效边界

利用R统计软件可以画出这20只股票投资组合的有效边界,根据均值方差模型的原理,随机的模拟出1万次和10万次投资组合的权重,将全部投资组合的点画在均值方差图中,选择每个期望收益下风险最小的点,即标准差最小的点连成有效边界曲线,如图2所示。从图中可以看出,这种方法的实现过程比较简单,需要大量的模拟才能得到一个相对有效的结果,且1万次和10万次模拟得出的有效边界存在一定的差异,并不是很精确。

三、基于模拟退火算法的有效边界

1. 模拟退火算法的思想。模拟退火算法起源于物理上的退火过程,模拟退火算法最早的思想由Metropolis(1953)提出,Kirkpatrick(1983)将其应用于组合优化。其原理可以表述为:模仿自然界退火现象而得,利用了物理中固体物质的退火过程与一般优化问题的相似性。从某一初始温度开始,伴随温度的不断下降,结合概率突跳特性在解空间中随机寻找全局最优解。其模仿物理退火的加温、等温和冷却过程,在一定温度下,搜索从一个状态随机地变化到另一个状态,随着温度的不断下降直到最低温度,搜索过程寻找到全局最优解。数学思想可以表述如下:

在温度T,分子停留在状态r满足 Boltzmann 概率分布:

$$P\{\bar{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r})\}=\frac{1}{Z(\mathbf{T})}\exp\left(-\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{k_B\mathbf{T}}\right)$$

\bar{E} 表示分子能量的一个随机变量, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 表示状态r的能量, $k_B>0$ 为 Boltzmann 常数。 $Z(\mathbf{T})$ 为概率分布的标准化因子:

$$Z(\mathbf{T})=\sum_{s\in D}\exp\left(-\frac{\mathbf{E}(s)}{k_B\mathbf{T}}\right)$$

在同一个温度T,选定两个能量 $\mathbf{E}_1<\mathbf{E}_2$,有

$$P\{\bar{E}=\mathbf{E}_1\}-P\{\bar{E}=\mathbf{E}_2\}=\frac{1}{Z(\mathbf{T})}\exp\left(-\frac{\mathbf{E}_1}{k_B\mathbf{T}}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1}{k_B\mathbf{T}}\right)\right]$$

模拟退火算法的主要步骤可以表述如下:

初始化:给定初温 $t=t_0$,随机产生初始状态 $s=s_0$,令 $k=0$;

```
Repeat
  Repeat
    产生新状态:  $s_j = \text{Generate}(s)$ ;
    if  $\min\{1, \exp[-(C(s_j) - C(s))/tk]\} \geq \text{random}[0, 1]$ 
       $s = s_j$ ;
  Until 抽样稳定准则满足;
  退温  $tk + 1 = \text{update}(tk)$  并令  $k = k + 1$ ;
```

Until 算法终止准则满足;

输出算法的搜索结果。

2. 实证分析。基于模拟退火法的基本思想,需要确定初始温度和内循环次数,这两个参数是最重要的参数,直接决定着算法的循环次数和优化效果,如果初始温度设置过低,则退温次数越少,导致搜索到全局最优的可能性越小。相反如果初始温度选择越高,退温次数越多,搜索到全局最优的可能性越大。但算法迭代次数的增加也会降低算法的可行性和有效性,因此需要通过多次尝试来确定模拟退火法的有效边界,选择最适合的参数控制循环次数和结果。

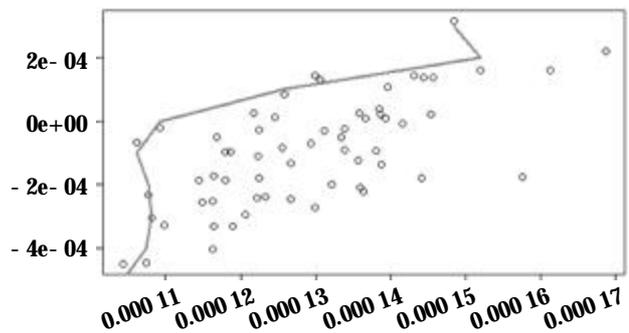


图3 初温为10 000、循环次数为10的模拟退火法有效边界

当把初温设置为10 000,内循环次数设置为10时,利用R统计软件画出的有效边界如图3所示,从图中看出,20只股票投资组合的点比较分散,循环次数过少使得有效边界不明显。

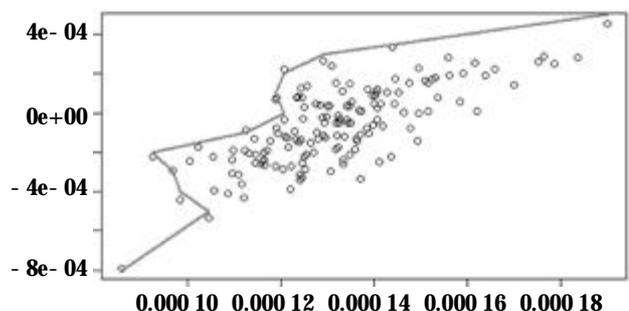


图4 初温为100 000、循环次数为50的模拟退火法有效边界(最优化有效边界)

AIS 中 HRM 流程的 REA 模型研究

周梅(副教授), 梁润平, 康晓林

(北京财贸职业学院立信会计学院, 北京 101101)

【摘要】在 REA 本体论视角下, 公司级 AIS 的分析与设计可以通过概念模型、逻辑模型和物理模型来精确表达。HRM 业务流程中的各种会计语义相关的 REA 模式按照不同的抽象级别分层连接在一起, 分别构成了公司价值系统、价值链和业务流程级别的概念模型。REA 概念模型经过建模妥协和载入性权衡, 转换为以数据库设计为主的逻辑模型。在 HRM 流程的逻辑模型中, 典型的资源模式是人力和资金、典型的事项模式是宣传事项和承诺事项、典型的关系模式有履行、预留、提议、存流、授权等。

【关键词】公司本体论; 概念模型; 逻辑模型; 业务流程

一、REA 公司本体论视角下的 AIS 模型体系

REA 公司本体论是以实现公司价值最大化为主要目标, 重点考察数据共享环境下, 公司的资源(Resource)、事项(Event)、参与者(Agent)这三要素, 以及这三大要素之间的具备会计相关语义的各种关系, 从而构建公司级 AIS 的模型体系。在 REA 公司本体论视角下, 公司级 AIS 的模型体系根据开发时间上的先后顺序依次划分为三个主要

阶段。这三个阶段的建模成果可以分别用概念模型、逻辑模型和物理模型来阐述, 其中最体现 REA 本质特征的是概念模型。

现有研究表明, 基于 REA 公司本体论创建的概念模型、逻辑模型和物理模型之间主要是因果决定关系, 其次是反馈和调节作用。因此, 开发人员在创建目标 AIS 的 REA 概念模型时, 就必须考虑到后续的逻辑模型中数据

当提高初始温度到 100 000, 循环次数为 50 时, 20 只股票投资组合的点比较集中, 优化的效果比较好。有效边界如图 4 所示。

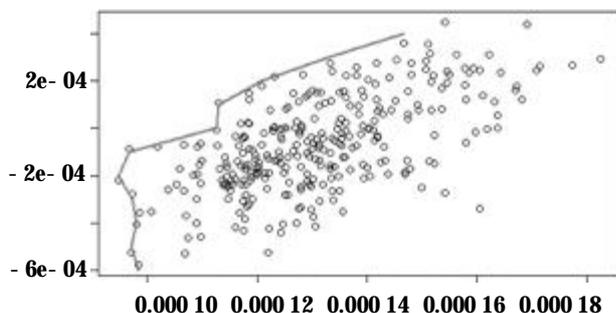


图 5 初温为 1 000 000、循环次数为 100 的模拟退火法有效边界

如图 5 所示, 当把初始温度提升至 1 000 000, 内循环次数为 100 时, 20 只股票投资组合的点的集中度不是很好, 有效边界也没有图 4 画得好, 因此根据 20 只股票投资组合最优化的有效边界选择图 4 中显示的有效边界效果最好。

四、小结

基于以上两种方法, 均可以绘制出投资组合优化问

题中的有效边界。从实证的效果来看, 利用均值方差模型方法绘制出的有效边界比较简单, 基于大量的模拟才能得到结果, 本文只是基于 20 只股票的交易数据所作出的一个模拟演示。如果投资组合数量过多, 例如有 1 000 只股票的情况下, 利用此方法就很难得到有效的结果, 并且需要进行大量的模拟, 容易导致计算机运算死机。但这种方法作为研究投资组合优化问题最常用的方法, 在现实中得到了广泛的应用。基于模拟退火算法绘制出的投资组合的有效边界相对来说要较精确, 并且运算速度相对较快, 本文基于这种方法所做的一个实证模拟也找到了相对精确的有效边界图形。

主要参考文献

- 荣喜民, 武丹丹, 张奎廷. 基于均值-VaR 的投资组合最优化[J]. 数理统计与管理, 2005(5).
- 张新立, 杨德礼, 王青建. 风险资本的组合投资最优化模型研究[J]. 经济数学, 2005(4).
- 埃德温·J. 埃尔顿, 马丁·J. 格鲁伯, 斯蒂芬·J. 布朗, 威廉·N. 戈茨曼. 现代投资组合理论和投资分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- 朱颖东, 钟勇. 一种改进的模拟退火算法[J]. 计算机技术与发展, 2009(6).