对Black-Scholes期权定价模型的修正及检验

王未卿　洪　贤　邓静涛

(北京科技大学东凌经济管理学院　北京　100083)

【摘要】Black-Scholes 期权定价模型是期权定价研究历史上的一个里程碑。受当时研究条件的限制,原始的 Black-Scholes 期权定价模型的假设条件并不完善,故其在准确性以及适用性上存在着不足。本文从原始 Black-Scholes 期权定价模型出发,基于对红利、交易费用和波动率的分析,在比较原始模型的基础上,对原始模型进行修正,从而整合出新的修正模型。同时,本文选取通用电气作为研究对象,通过市场中真实的数据进行期权价格的实证研究,结果表明修正后的模型在准确性与适用性方面相比于原始模型有了一定的提升。

【关键词】Black-Scholes 期权定价模型　红利　交易费用　波动率

Black Scholes 期权定价方法的基本思想是：衍生资产的价格及其所依赖的标的资产价格都受到一种不确定性因素的影响,二者遵循相同的维纳过程。如果建立一个包含恰当的衍生资产头寸和标的资产头寸的资产组合,可以消除维纳过程,标的资产头寸与衍生资产头寸的盈亏可以相互抵消，由此构成的资产组合为无风险的资产组合，在不存在无风险套利机会的情况下,该资产组合的收益应等于无风险利率。我们由此最终得到衍生资产价格的 Black-Scholes 微分方程。

尽管 Black Scholes 期权定价模型的提出被认为是期权定价研究上的一个里程碑，但是随着众多学者的研究以及该模型在真实市场中的运用,该模型也暴露出一些不足之处,主要是其众多假设条件所带来的限制已经与真实的市场不吻合。这也降低了现实生活中具体期权价格估算的准确性。因此,为了能更准确地计算期权的价格，对原始期权模型进行分析研究和修正就具有一定的实用意义。

一、Black-Scholes 期权定价模型及其修正

我们在推导 B-S 期权定价模型时,用到了一些基本的假设条件:①金融资产收益率服从对数正态分布;②在期权有效期内,无风险利率和金融资产收益变量是恒定的;③市场无摩擦,即不存在税收和交易成本;④金融资产在期权有效期内无红利及其他所得(该假设后被放弃);⑤该期权是欧式期权,即在期权到期前不可实施。

但是,考虑到在现实生活中的具体情况,以上的某些假设条件存在部分不足,从而导致 B-S 期权定价模型在很多情况中难以运用,并且也缺乏一定的准确性。①现实生活中,大部分的股票都会对其持有者支付一定数量的红利，红利的支付会对股价产生较大的影响,因此对于存在红利支付的股票,则无法用原始的 B-S 模型进行估量。②现在生活中存在一定的交易费用,因此如果对头寸进行不断的再调整,会带来巨大的交易费用,从而使得 B-S 模型过高地估计了期权的价格。③模型中对波动率的计算方式也有某些不足。首先,在原始的 B-S 定价模型中,对于波动率的估计有赖于历史数据的数量。因此,我们要考虑到数据选取的准确性。其次,与无风险利率一样，这种对波动率计算的方法没有考虑到市场对其的未来预期,故也可能存在一定的偏差。

对于以上所述的种种问题，需要提出合适的方法加以修正。对于红利的问题,本文主要参考了 Merton 提出的两种红利模型,分别是不连续红利模型与连续红利模型,然后加入原始的 B-S 模型中。交易费用的问题,则参考 Leland 的研究,对 B-S 模型进行了一定的修正,将市场摩擦的影响加入到对波动率的影响中。关于波动率的估计则存在较多方法,本文主要选取了常用的两种方法分别对其进行分析，并选取其中较合适的一种,对 B-S 模型进行改良。

(一)加入红利的 B-S 期权定价模型的变形

1. *存在不连续红利时 B-S 模型的变形。*股票的价格通常被认为由两部分组成,分别是无风险部分与有风险部分。对于短期限的期权，将其标的股票所支付的红利看做是某种无风险收益。因此可以根据每一笔红利的支付时间与支付数量,将红利贴现到最初的时间并在期权支付价格中扣除。计算贴现时,将除息日看做是贴现日期,将无风险利率作为贴现利率。对于欧式期权,这时只需要对 S 变形即可。

$$S=S_0-\sum a_i e^{-rt}$$

因为看涨期权价格为 c,为避免冲突,用 a 来表示股息。t 则为除息时间。将其代入原 B-S 模型则变形为:

$$c=(S_0-\sum a_i e^{-rt})N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$p=Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)-(S_0-\sum a_i e^{-rt})N(-d_1)$$

其中,$d_1=\dfrac{\ln\left(\dfrac{(S_0-\sum a_i e^{-rt})}{K}\right)+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

2. *存在连续红利时 B-S 模型的变形。*对于期限较长的期权,通常把其标的股票所支付的红利看做是连续的。因为红利

的每一次支付都会使股票的价格下降相同的幅度，因此也可以将股票的连续红利收益率看做是股票价格下降的比例。所以只需要简单对股票价格 S 变形即可，T 时刻的股票价格可以表示为：

$$S=S_0e^{(-qT)} \quad (1)$$

其中，q 为股息收益率。对于欧式期权，将 S 的变形式代入原 B-S 方程，可得如下新模型：

$$c=S_0e^{(-qT)}N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$p=Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)-S_0e^{(-qT)}N(-d_1)$$

其中，$d_1=\dfrac{\ln[\frac{S_0e^{(-qT)}}{K}]+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t} \quad (2)$$

（二）带有交易费用的 B-S 期权定价定价模型的变形

在推导 Black-Scholes 期权定价模型的过程中，假定对冲不断发生，因此可以不断调整头寸。考虑到这样的假定如果存在于现实之中，不断的买卖会带来巨大的交易费用，因此在考虑到交易费用存在的前提下，需要对 B-S 模型进行一部分的调整，以适应现实中的运用。本文将采用离散时间模型，即期权定价仅与期权开始时的状态有关。

对于欧式看涨期权，构造同样的投资组合 $\Pi=-f+\frac{\partial f}{\partial s}S$，不过对于投资组合在时段 δt 后的改变量 δΠ，不再为看涨期权的变化量 δf 与股票的变化量 $\frac{\partial f}{\partial s}\delta S$ 的差，而是需要减去交易费用。

在 t 时刻，假设股票价格为 S，则在投资组合中，用 $\frac{\partial f}{\partial s}(S,t)$ 表示股票投资的份额。当过去 δt 时间后，股价和股票投资份额均有变动，所以，在 δt 的时间内，交易的份额为：$n=\frac{\partial f}{\partial s}(S+\delta S,t+\delta t)-\frac{\partial f}{\partial s}(S,t)$。

最后，我们运用泰勒定理展开交易的份额 n，并根据期望交易额来推导期望的交易费用为：

$$E(k|n|S)=k\sigma S^2\sqrt{\delta t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right|$$

用投资组合新的定义式重新推导 B-S 模型，并根据无套利分析，该投资组合一定获得无风险收益率，最后得到的新模型为：

$$c=S_0N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$r(f-\frac{\partial f}{\partial s}S)\delta t=E[(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\times\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\sigma^2S^2)\triangle t-k|n|S]$$

$$d_1=\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r+\frac{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}{2})(T-t)}{\sqrt{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=d_1-\sqrt{(\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}})(T-t)}$$

与上文中得出的红利模型相结合，可以得到两个分别基于连续红利与不连续红利并加入交易费用的新模型。对于不连续红利模型，则有：

$$c=(S_0-\sum a_ie^{-rt})N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$p=Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)-(S_0-\sum a_ie^{-rt})N(-d_1)$$

其中：

$$d_1=\frac{\ln[\frac{(S_0-\sum a_ie^{-rt})}{K}]+(r+\frac{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}{2})(T-t)}{\sqrt{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}\sqrt{T-t}};$$

$$d_2=d_1-\sqrt{(\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}})(T-t)} \quad (4)$$

对于连续红利模型，则有：

$$c=S_0e^{(-qT)}N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$p=Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)-S_0e^{(-qT)}N(-d_1)$$

其中：

$$d_1=\frac{\ln[\frac{S_0e^{(-qT)}}{K}]+(r+\frac{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}{2})(T-t)}{\sqrt{(\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}})(T-t)}}$$

$$d_2=d_1-\sqrt{(\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}})(T-t)} \quad (5)$$

（三）B-S 期权定价模型中波动率的变形

波动率取值的准确与否对期权定价的准确性有着重要的影响。原始 B-S 模型中，波动率用于计算股票提供的不确定性部分的收益，被定义为按连续复利时股票在 1 年内提供收益率的标准差。假设股票在短时间内的百分比变化为正态分布，即股价符合对数正态分布。对于波动率的估值，在原始 B-S 模型中是通过估计收益率从而计算其标准差来得到的。最终我们得到了简化后的波动率计算方程为：

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2$$

其中：S 为股价，μ为股票价格的收益率期望，σ 为股票价格的波动率，n+1 为总的观察次数，即数据数量，$\overline{\mu}$为 μ_i 的平均值。

对于原始波动率的定义，存在着关于 n 的取值的重要问题。数据的数量取值难以取得一个合适的值，数据较多时，理论上对波动率的估计较为准确，但是波动率会随着时间的变化而变化，较老的数据对波动率影响应该较小，而新的数据对波动率的影响应该较大。因此，当采用这样的方法对期权价格加以估计可能会产生较大的误差，所以对波动率的改良对于期权定价有着重要的意义。现代研究对波动率的改良主要有两种方法：

1. *指数加权移动平均法*。在 Arch(m)模型，对于不同日期的μ_i^2项赋予不同的权重，特别是对于新的数据赋予较大的权重，假设数据为最近 m 天的观察数据，模型定义为：

$$\sigma^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i\mu_{n-i}^2$$

其中，a_i项为μ_{n-i}^2项所对应的权重，另外有权重之和为1，即$\sum_{i=1}^{m} a_i=1$，而指数加权移动平均法则是对其的一个简化，即假设权重项a_i将随着时间而不以指数速度不断递减，即$a_i=\beta a_{i-1}$。其中β为一常数，介于0与1之间。将上式代入原始的波动率公式中，可以得到新的模型：

$$\sigma_n^2=\beta\cdot\sigma_{n-1}^2+(1-\beta)\mu_{n-1}^2 \quad (6)$$

即第n天的波动率由第n-1天的波动率σ_{n-1}和第n-2天末与第n-1天价格变化的百分比μ_{n-1}来决定的。

2. *广义自回归条件异方差法*。GARCH(1,1)模型是基于ARCH模型的一个延伸，相比于指数加权移动平均法显得较为复杂。GARCH(1,1)的表达式如下：

$$\sigma_n^2=\alpha\mu_{n-1}^2+\beta\cdot\sigma_{n-1}^2+\gamma V_L \quad (7)$$

很明显可以看出，该模型与EWMA模型的最大的不同，就在于其引入了一个新的项V_L，即长期平均方差。而三个权重值之和依然为0，即$\alpha+\beta+\gamma=0$。

二、原始B-S模型和改良后B-S模型的对比：基于通用电气的实证分析

本部分将对改良后的期权定价模型进行检验，以历史数据计算2012年1月12号到期的通用电气欧式看涨期权价格，并与真实情况进行比较。首先，我们通过历史数据估计方法来计算波动率。因为考虑到过老的历史数据对预测将来的波动率缺乏较大的相关性，因此根据经验方法，选取100天内的收盘价数据进行计算。

表1　100天内的收盘价数据

Date	收盘价	价格比率(S_i/S_{i-1})	日收益$\mu_i(\ln S_i/S_{i-1})$
6-May-11	20.01		
5-May-11	19.90	0.994 502 749	-0.005 512 417
4-May-11	20.27	1.018 592 965	0.018 422 229
3-May-11	20.64	1.018 253 577	0.018 088 98
……	……	……	……
14-Dec-10	17.69	1.011 435 106	0.011 370 219
13-Dec-10	17.62	0.996 042 962	-0.003 964 888

由此，统计得到，$\sum_{i=1}^{n}\mu_i=-0.127\ 197\ 528$，而$\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2=0.019\ 757\ 406$，因此可以求得日收益率的标准差的估计量：

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)^2}$$

$$=0.014\ 497\ 168$$

一般而言，一年有252个交易日，因此可以估计出通用电气的波动率为每年0.230 135 407($0.014\ 497\ 168\times\sqrt{252}$)，即23.013 5%。

同时，在这里，我们将选用广义自回归条件异方差法来计算改良后的波动率。因为广义自回归条件异方差法与指数加权移动平均法类似，数据选择范围为252个交易日的所有数据。最后，我们结合波动率公式，并通过应用规划求解工具等推出：长期波动率为$\sqrt{0.000\ 276}=0.016\ 627$，即每天1.662 7%。而在这个时刻的波动率$\sigma_n$则为：$\sqrt{0.000\ 312\ 871}\times\sqrt{252}=0.280\ 790\ 791$，即$\sigma_n$为28.079%。

在计算出波动率后，就可以代入具体数据来计算期权价格。下面分别用原始模型与改良后的模型代入数据计算欧式看涨期权的价格。对于无风险利率的确定，美国通常使用10年期的国债利率(US Treasury Bonds Rates)来代替，在5月6日为3.28%。

在原始B-S模型中，欧式看涨期权定价公式如下：

$$c=S_0N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\text{其中：}d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

5月6日到看涨期权执行日2012年1月12日共有251天。即T-t=251/365=0.687 671(年)。波动率σ=23.013 5%。无风险利率r=3.28%。5月6日收盘价为s=20.01。代入不同执行价的期权数据，可以得到不同的d_1与d_2，并将数据代入欧式看涨期权的计算公式中，即$c=S_0N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$，可以求得这些有着不同执行价格的看涨期权的估计价格。

表2　原始模型中不同执行价格的看涨期权的估计价格

执行价格K	市场报价c′	估计价格c	误差△c|c′-c|
2.5	17.49	17.565 76	0.075 76
5	15.11	15.121 52	0.011 52
7.5	12.45	12.677 27	0.227 27
10	10.05	10.233 09	0.183 09
12.5	7.45	7.793 374	0.343 37
15	5.15	5.415 373	0.265 37
17.5	3.1	3.308 542	0.208 54
20	1.56	1.742 772	0.182 77
22.5	0.67	0.794 624	0.124 62
25	0.26	0.319 434	0.059 43
30	0.05	0.038 718	0.011 282
35	0.03	0.003 642	0.026 358
40	0.01	0.000 297	0.009 703

在修正后B-S期权定价模型中：

首先，需要用新计算的波动率替代原始的历史数据计算出的波动率。在这里用GARCH(1,1)模型计算出的波动率σ=28.079%。由于通用电气在5月6日到期权执行日期2012年1月12日期间并没有支付红利的计划，因此不需要考虑红利对股价的影响。新模型如下所示：

$$c=S_0N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\text{其中：}d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}\ \sqrt{T-t}}$$

$$d_2=d_1-\sqrt{\left(\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\right)(T-t)}$$

其次，考虑到存在着市场摩擦，由于美国对交易费用的核定并不是按照金额来确定，而是根据交易数量的大小确定，因此不能直接得到对市场与投资者情况而定的交易费用估量的

系数 k。美国股票的交易中介商通常对 5 000 股之内的交易收取每股 0.05 美元的交易费用,那么考虑到通用电气的价格约为 20 元,则交易费用系数 k 约为 0.05/20=0.002 5,即0.25%。代入数据后,可以计算出新的调整后的波动率为 $\sigma'=\sqrt{\sigma^2-k\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}}$ =0.273 951 891,即新的波动率为 27.395%。代入无风险利率 r=3.28%,5 月 6 日收盘价为 s=20.01,T−t=0.687 671(年),可以计算出以不同执行价格为基准的不同的 d_1 与 d_2。再将数据代入欧式看涨期权的定价公式 $c=S_0N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$中,可以求得对各个不同执行价格的期权的估计价格。

表 3　模型修正后不同执行价格的期权的估计价格

执行价格K	市场报价c′	估计价格c	误差△c|c′−c|
2.5	17.49	17.565 76	0.07576
5	15.11	15.121 52	0.011 52
7.5	12.45	12.677 27	0.227 27
10	10.05	10.233 09	0.183 09
12.5	7.45	7.793 343	0.343 34
15	5.15	5.415 111	0.265 11
17.5	3.1	3.307 767	0.207 77
20	1.56	1.741 598	0.181 6
22.5	0.67	0.793 497	0.123 5
25	0.26	0.318 647	0.058 65
30	0.05	0.038 512	0.011 488
35	0.03	0.003 609	0.026 391
40	0.01	0.000 293	0.009 707

最后,我们将原始模型的误差与改良后模型的误差进行比较。另外,考虑到用 B−S 模型对执行价格较大的期权价格估计准确性较差,比如执行价格分别为 40 元、35 元,价格分别为 0.01 元、0.03 元的欧式看涨期权,我在分析时对其进行了忽略。并且对于执行价格较低的欧式看涨期权,由于其计算出的 d_1 与 d_2 非常大,则推算出的 $N(d_1)$与 $N(d_2)$都无限接近于 1。对于这样计算出的期权价格的误差的比较则显得没有意义,因此我们对执行价格分别为 2.5 元与 5 元的欧式看涨期权进行了忽略。

表 4　误差比较

期权执行价格	原始模型误差△c	新模型误差△c′	△c−△c′
7.5	0.227 274	0.227 274	6.2E−10
10	0.183 087	0.183 086	6.64E−07
12.5	0.343 374	0.343 343	3.11E−05
15	0.265 373	0.265 111	0.000 261
17.5	0.208 542	0.207 767	0.000 776
20	0.182 772	0.181 598	0.001 174
22.5	0.124 624	0.123 497	0.001 127
25	0.059 434	0.058 647	0.000 787
30	0.011 282	0.011 488	−0.000 21

在表 4 中可以清晰看到,修正后的模型对于期权价格的估计在准确性上有了不同程度的提高。虽然对于执行价格为 30 元的期权,修正后模型的误差大于原始模型所估计出的价格的误差,不过这个问题有可能是由上面所提到的 B−S 模型对于执行价格较大的期权价格估计并不理想所导致的。总的来说,修正后模型在对期权价格估计的准确性上要比原始模型略微好一些。

三、结论

本文对于 Black Scholes 期权定价模型的假设条件的不足之处进行了讨论,并成功得出了加入两种红利模型与市场摩擦性估量,并且对波动率进行了部分修正后的新的期权定价模型。

在代入具体数据后,检验出新的模型在准确性以及适用性方面优于原始 B−S 模型:

第一,在分析 Merton 对于期权定价问题时的红利模型的研究后,得到了加入两种不同红利模型后的 B−S 期权定价模型。这种变形增加了该模型的适用性,使其能够估量支付红利的欧式期权。

第二,在分析中,由于考虑到不断的买卖会带来巨大的交易费用,所以需要对 B−S 模型进行一部分的调整,以适应现实中的运用。

第三,用 EWMA 与 GARCH(1,1)两种更精确并且更加符合现实的模型对波动率重新进行了估量。

第四,以通用电气为例,代入数据对新的修正后模型进行检验,得出新模型在准确性上有一定程度的提高。

主要参考文献

1. Black F,Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities.Journal of Political Economy,1973;81

2. S.D. Hodges, A.Neuberger, Optimal replication of contingent claims under transactions. Future Markets,1989;8

3. Leland H. Option pricing and replication with transactions costs. Journal of Finance,1985;5

4. Merton R C. Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management science,1973;4

5. Merton R C. Option pricing when underlying process of stock returns is discontinuous. Journal of Financial Economies, 1976;3

6. 郑小迎,陈金贤.有交易成本的期权定价.电子科技大学学报(社科版),2000;2

7. 刘霞倩,柴俊.带交易费用和红利的欧式期权定价的数量方法.经济数学,2004;21

8. 王杨,肖文宁,张寄洲.有交易成本的欧式期权定价公式.上海师范大学学报(自然科学版),2005;34

9. 赵胜民.衍生金融工具定价.北京:中国财政经济出版社,2008

10. 许文佳.On−One's−Own 期权在不同红利政策下的定价讨论.吉林大学数学研究生硕士论文,2007