

基于 PWM 方法的 CVaR 风险动态区间估计模型

陆丹 袁永生(教授)

(河海大学理学院 南京 210098)

【摘要】 本文基于 PWM 方法推导了 CVaR 的动态置信区间估计模型,论述了正态分布下风险资产的 CVaR 假设检验方法及基于 PWM 方法的置信区间求法,最后用中信(中信标普 300)指数对中国股市风险情况进行了区间估计及显著性检验的实证分析。结果表明本文提出的方法较参数法置信区间有更好的估计精度,且能较为敏感地捕捉收益的动态性。

【关键词】 置信区间 条件极值 VaR 条件风险价值 风险管理

一、研究思路

作为金融市场风险度量的主流模型, VaR 风险计量技术已成为金融风险管理的国际标准。基于风险极值理论的 VaR 建模研究,为构建更为精确的 VaR 风险估计方法提供了新思路。但 VaR 技术的数学特性较差,且不满足次可加性,进而与风险的经济意义不符,更重要的是其不能有效地捕捉收益分布的尾部特征,对极端风险的度量不准确。

针对 VaR 存在的缺点,学者们提出了 CVaR 风险管理方法。CVaR 是超出 VaR 的损失期望值,是指在一定置信水平下,某一资产或资产组合损失超过 VaR 的尾部事件期望值。因此 CVaR 取值一般高于 VaR,更加符合风险管理的谨

慎性原则,且具有良好的数学性质,并继承了 VaR 的诸多优点,在很多方面比 VaR 更优越。

在风险管理中,对风险进行区间估计能给出风险的波动范围。PWM 方法通过对样本数据的特定加工,准确捕捉样本数据特征,并通过权函数降低异常点的权重,缓解异常点对样本整体的影响,从而使区间估计获得好的稳健性,且在相同的置信水平下置信区间长度更短,而真值覆盖率更高。

本文充分利用样本信息,基于 PWM 方法推导出了更优秀的 CVaR 动态置信区间估计模型。这一模型能在捕获极端条件下收益率时间序列动态特征的基础上,更准确和有效地衡量 CVaR 的估计风险。随后,本文运用中信指数对这一模

部效益评价结论,具体结果如表 4 所示。

表4 潍坊市寒亭区高里镇土地整理项目外部效益评价结论

评价对象		优	良	中	差	特征值
准则层	社会影响	0.296	0.453	0.251	0	1.956
	环境影响	0.051	0.455	0.343	0.151	2.594
	生态影响	0.225	0.43	0.26	0.085	2.205
	景观影响	0.516	0.384	0.1	0	1.584
目标层	外部效益	0.252	0.438	0.253	0.057	2.116

7. 评价结论分析。根据计算的综合模糊集合 $B_{综合}$ 分析,潍坊市寒亭区高里镇土地整理项目外部效益等级中优为 25.2%,良为 43.8%,中为 25.3%,差为 5.7%。根据最大隶属度原则,该项目外部效益等级确定为良。其中,项目的社会影响为良,隶属度为 45.3%;项目的环境影响为良,隶属度为 45.5%;项目的生态影响为良,隶属度为 43%;项目的景观影响为优,隶属度为 51.6%。总体来看,潍坊市寒亭区高里镇土地整理项目的实施取得了正的外部效益,对项目区的社会、环境、生态及景观等均产生了良好的影响。

四、结语

我国政府投资项目主要集中在基础设施建设及公用事业

领域,项目投资额大、周期长、收益较低,但项目实施对国家经济发展、民生改善具有重要意义,项目实施往往具有巨大的外部效益。在目前的项目评审体系下,很难对这些外部效益进行规范、合理的评价,难以对项目的外部效益进行系统地分析。本研究从外部性形成机制入手,在系统分析项目外部效益内涵的基础上,以土地整理项目为例,构建了项目外部效益评价体系,并成功地对项目外部效益进行了评价分析,为反映政府投资项目外部效益,全面展现项目实施绩效提供了一种可借鉴的思路和方法。

【注】 本文系山东省社会科学规划研究重点项目“山东省国际金融组织贷款项目绩效评价体系研究”(编号:10BJGJ21)及山东省软科学研究计划项目“绿色低碳城镇评价体系构建及能力建设”(编号:2010RKGB1106)的阶段性研究成果。

主要参考文献

1. 范大路. 生态农业投资项目外部效益评估研究. 成都:西南财经大学出版社, 2001
2. 艾亮辉. 土地整理投资项目后评价研究. 杭州:浙江大学博士学位论文, 2004
3. 罗明. 土地整理及其生态环境影响综述. 资源科学, 2002; 24

型进行实证分析并与参数法置信区间模型进行比较,验证了 PWM 方法下置信区间的有效性。

二、条件风险极值 CVaR 置信区间模型的构建

正态分布下资产的 CVaR 值的度量方法是本文的研究基础,有关 CVaR 的具体定义及其度量方法可参见。为方便文中使用,这里给出资产—正态模型下的 CVaR 风险的理论值。

设某资产收益 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ($-\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty$),有来自该正态分布的一个容量为 n 的样本 X_1, \dots, X_n ,则对给定概率损失 α (一般 $\alpha \leq 0.1$) 下,风险资产的 CVaR 为:

$$CVaR = -\bar{X} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (1)$$

$$\text{其中: } c(\alpha) = \frac{\varphi[\Phi^{-1}(1-\alpha)]}{\alpha}, c_n = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$\varphi(\cdot)$ 为标准正态分布的概率密度函数, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数,恒有 $\Phi^{-1}(1-\alpha) > 0$ (因 $\alpha \leq 0.1$) 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的 $(1-\alpha)$ 下侧分位数。

这里,以深度加权平均 PWM 方法,给出资产的 CVaR 的置信区间水平为 $1-\beta$ 的区间估计。

1. 对上述容量为 n 的样本做有放回抽样 n 次,得样本 X_*^1 , 再对原样本作有放回抽样 n 次,得样本 X_*^2 , 依此类推 m 回,得到 m 个样本 X_*^1, \dots, X_*^m 。

2. 对抽出的每个样本数据进行如下操作: 为叙述方便,每个样本均记 $(X_1, \dots, X_n) = X$ 。

(1) 取样本的中位数 $\text{med}(X)$ 。

(2) 取样本与样本中位数绝对偏差的中位数:

$$MAD(X) = \text{med}\{|X_i - \text{med}(X)|, i=1, \dots, n\} \quad (2)$$

(3) 令 X_i 的投影深度为:

$$PD(X_i, X) = \frac{1}{1 + \frac{|X_i - \text{med}(X)|}{MAD(X)}} \quad (3)$$

可微权重函数为:

$$\omega(r) = I(r \geq c) + \frac{e^{-k(1-\frac{r}{c})^2} - e^{-k}}{1 - e^{-k}} I(r < c) \quad (4)$$

其中: $I(\cdot)$ 为示性函数, k, c 为参数, $k > 0, c \in (0, 1)$ 。当样本分布为轻尾时 c 取较小一些,重尾时 c 取较大一些。

定义权函数 $\omega_i = \omega(PD(X_i, X))$ 。

(5) 样本的深度加权平均 PWM 为:

$$PWM(X) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i X_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \quad (5)$$

3. m 个样本分别经由第二步处理,每个样本得到一个深度加权平均值,记为 $PWM(X_*^1), \dots, PWM(X_*^m)$, 令: $PWM(X_*^1) = y_*^1, \dots, PWM(X_*^m) = y_*^m$ 。

将 $(y_*^1, \dots, y_*^m) = Y$ 作为一个样本,分别计算 y_*^1, \dots, y_*^m 的投影深度,并按大小排序,得到:

$$PD(y_*^{(1)}, Y) \leq \dots \leq PD(y_*^{(m)}, Y) \quad (6)$$

4. 在 $y_*^{(1)}, \dots, y_*^{(m)}$ 中,从 $y_*^{(m)}$ 向前取 $(1-\beta)m$ 个数,并令: $y_*^{kl} = \min\{y_*^{([\beta]+1)}, \dots, y_*^{(m)}\}, y_*^{ku} = \min\{y_*^{([\beta]+1)}, \dots, y_*^{(m)}\}$ 。

得到 \bar{X} 的置信水平为 $1-\beta$ 的置信区间 $[y_*^{kl}, y_*^{ku}]$ 。

由上述的置信区间,结合式(1)得 CVaR 的置信水平为 $1-\beta$ 的置信区间为 $[-y_*^{ku} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, -y_*^{kl} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}]$ 。

三、风险价值 CVaR 的假设检验

受市场供求、政策、汇率等多种因素的影响,资产的价值也呈现出波动性和风险性。在同一概率损失水平下,已知某资产的条件风险值是,需要检测另一个资产的风险值与之相比有无明显差异。设检验的显著性水平为 β 。

$$H_0: \lambda = \lambda_0, H_1: \lambda \neq \lambda_0$$

$$H_0 \text{ 成立时, } \lambda \in [-y_*^{ku} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, -y_*^{kl} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}]$$

易知 H_0 的拒绝域为:

$$\lambda \in [-\infty, -y_*^{ku} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}] \cup [-y_*^{kl} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, +\infty]$$

当 $\lambda > -y_*^{kl} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ 或 $\lambda < -y_*^{ku} + c(\alpha) \cdot c_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ 时,认为 CVaR 有显著变化。

四、实证分析

本文选用中信指数(中信标普 300)作为样本数据,选取 2010 年 1 月 6 日到 2011 年 10 月 21 日共 434 个交易日的收盘价为对象,给出 CVaR 风险的区间估计,并通过假设检验分析 CVaR 风险与 NYSE(纽约股票交易所)市场风险是否存在显著性差异。

1. 对数收益率的正态性检验。股票市场的日对数收益率 X,以相邻营业日收盘的中信指数的对数—一阶差分表示,即: $X = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$ 。计算过程借助 Matlab 软件完成。

表1 收益率统计描述

均值	标准差	测试值 jbstat	临界值 CV	偏度	峰度
2.209 7e-004	0.006 0	4.763 6	5.837 7	0.109 4	3.464 3

表 1 表明,中信指数收益率存在微小的右偏,峰度也略高于正态分布的峰度,可初步认为收益率服从正态分布。进行 jbstest 正态检验可知,在显著性水平 0.05 下,测试值 4.763 6 小于临界值 5.837 7,所以接受数据为正态分布的假设。样本收益率序列的正态概率图见图 1。通过图 1 可见散点基本聚集在直线上,因此数据基本服从正态分布。

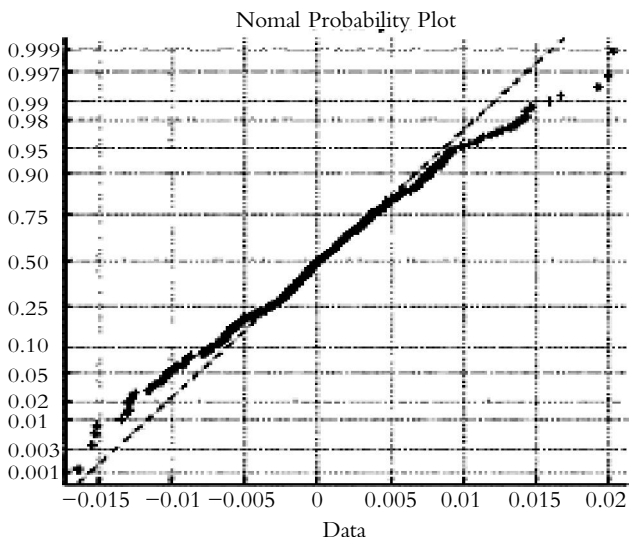


图1 样本的正态概率图

Q-Q图用于检验样本是否来自同一分布,图2显示样本值与正态分布的理论数值之间的Q-Q图,接近直线,故可认为样本服从正态分布。

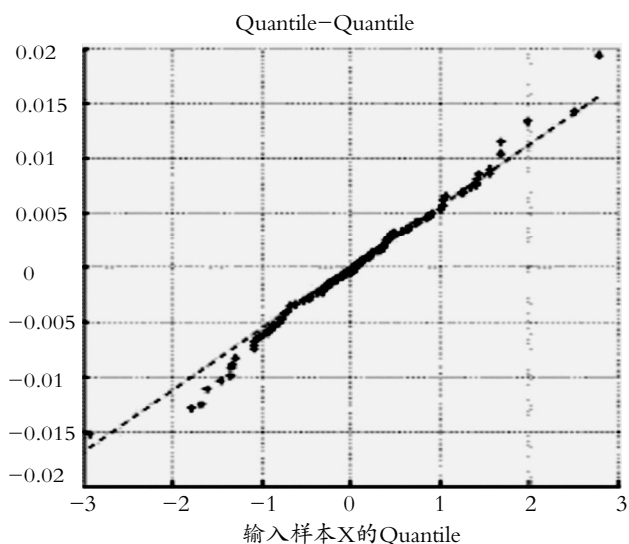


图2 样本的Q-Q图

通过这些样本正态检验,可以认为收益率序列具有正态性。

2. CVaR的区间估计。根据CVaR置信区间模型的构建过程,取 $\alpha=0.05, \beta=0.05, k=3, c=0.8$,可得:

在95%置信水平下,由所取数据计算的我国股市CVaR风险的置信区间为 $[0.0078, 0.0164]$ 。上述结果表明,样本期内我国股市CVaR风险不是很大,尾部事件发生时平均损失不是很高。

3. CVaR的假设检验。这里以检验样本期间我国股市的CVaR风险与成熟的NYSE(纽约股票交易所)市场的CVaR序列均值0.023是否相等,以分析我国股市与国际股市风险是否存在显著差异。

$$H_0: \lambda = 0.023, H_1: \lambda \neq 0.023,$$

H_0 成立时, $\lambda \in [0.0078, 0.0164]$ 。易知 H_0 的拒绝域为 $\lambda \in (-\infty, 0.0078) \cup (0.0164, +\infty)$ 。因为 $0.0164 < 0.023$,拒绝原假设,认为CVaR有显著变化。认为样本期内我国股市的CVaR风险与成熟的NYSE的风险均值差距较大,在置信水平上有显著差异,这说明了我国金融市场还不成熟。但也说明我国的资产风险低于NYSE的风险,金融市场情形有所好转。

4. CVaR的置信区间估计有效性。为了验证基于PWM方法的CVaR置信区间估计的有效性,使用如今广泛应用的参数模型(如正态分布模型)对同一时间段中信(中信标普300)指数的日对数收益率进行CVaR的置信区间估计,估计结果见表2:

表2 PWM方法模型和正态分布模型的CVaR的置信区间估计结果

模型	置信水平	置信下界	置信上界	区间宽度
PWM方法模型	95%	0.0078	0.0164	8.6×10^{-3}
正态分布模型	95%	-0.0143	0.0158	3.01×10^{-2}

由表2可以看出正态分布模型的置信区间宽度的数量级为 10^{-2} ,大于基于PWM方法构建的CVaR置信区间估计模型得到的区间宽度数量级 10^{-3} 的估计结果。比较以上模型对置信区间的估计结果,可以看到本文中所构建的CVaR置信区间模型不仅是对CVaR的动态置信区间估计,而且具有更好的估计精度,能考虑当前的预期和波动性,能较为敏感地捕捉收益的动态性及估计精度变动。

五、总结

为了对在险值的估计精度进行度量,本文基于深度加权平均PWM理论建立了CVaR的动态区间估计模型,得到了CVaR置信区间的解析式的一般形式,更为精确和有效地衡量CVaR的估计风险,且对大小样本都适用。投资者可根据本文的理论结果,依照各自的优良标准来评估实际风险,因此本文的方法具有较高的理论和实用价值。

【注】本文受江苏省水利科技基金(编号:2011059)和河海大学自然科学基金(编号:2009426311)资助。

主要参考文献

1. 刘小茂,李楚霖.资产组合的CVaR风险的敏感度分析.数学物理学报,2004;24
2. 刘小茂,杜红军.金融资产的VaR和CVaR风险的优良估计.中国管理科学,2006;14
3. 杜红军,刘小茂.金融资产的CVaR风险的区间估计及假设检验.数理统计与管理,2007;26
4. Danielsson J, De Vries C G. Value-at-Risk and extreme returns. Annals d' Economie et de Statistique, 2000; 60
5. Bystrom H N E. Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. International Review of Financial Analysis, 2004; 13
6. Fernandez V. Risk management under extreme events. International Review of Financial Analysis, 2005; 14